

---

# Les circuits magnétiques linéaires

---

« Si la nouvelle physique nous a conduit en quelque lieu, c'est en nous-mêmes, le seul endroit en fin de compte où nous puissions aller. »  
Gary Zukav in « La danse des éléments »

## Résumé

Les deux grandeurs magnétiques essentielles, excitation et induction, sont liées par une relation de proportionnalité qui dépend du point de fonctionnement. Mais en ce qui concerne les matériaux ferromagnétiques, les études achoppent sur la non linéarité des comportements et rend les études analytiques délicates.

Pour s'affranchir de cet inconvénient, on s'attache à associer le plus souvent possible un modèle linéaire aux phénomènes observés. La linéarisation qui en découle est fondée sur une série d'hypothèses : la non influence des fuites au niveau des bobinages et des entrefers, l'uniformité de l'induction sur toute section droite du circuit magnétique et aussi la linéarité du matériau obtenue en considérant la perméabilité relative constante. Le modèle qui résulte de ces simplifications est celui d'Hopkinson. Sa conséquence la plus significative est la mise en place d'une série de comportements similaires aux circuits électriques linéaires : la loi d'Hopkinson, le pendant de la loi d'Ohm, associe la tension magnétique au flux d'induction à travers la réluctance. Les lois de l'électrocinétique sont ensuite adaptées aux circuits magnétiques en évoquant les théorèmes essentiels.

## Sommaire

<b>I. Linéarisation des circuits magnétiques .....</b>	<b>2</b>
I.1. Introduction .....	2
I.2. Courbe réelle des matériaux ferromagnétiques .....	2
I.3. Différentes linéarisations .....	2
<b>II. Les circuits magnétiques parfaits.....</b>	<b>3</b>
II.1. Hypothèses sur les lignes de fuite .....	3
II.2. Hypothèses sur le vecteur induction $\vec{B}$ .....	3
II.3. Dans l'entrefer.....	3
II.4. Et le matériau ?.....	4
II.5. Conclusion.....	4
<b>III. Traduction des différentes lois pour les CMP.....</b>	<b>4</b>
III.1. Mise en place.....	4
III.2. Relation d'Hopkinson.....	5
III.3. Analogie électrique .....	5
III.4. Association de réluctances .....	6
<b>IV. Résumé / Conclusion .....</b>	<b>6</b>

# I. Linéarisation des circuits magnétiques

## I.1. Introduction

- On dispose des grandeurs magnétiques  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$ .
- Ces deux grandeurs sont liées par le milieu dans lequel elles apparaissent :  $\vec{B} = \mu_0(1 + \chi)\vec{H}$ .
- Lors de leur utilisation technologique, il est important de générer l'induction magnétique  $\vec{B}$  avec un apport électrique minimum, c'est à dire en minimisant le champ d'excitation  $\vec{H}$  donc le courant  $I$ .
- Cette constatation conduit à utiliser des matériaux pour lesquels la susceptibilité  $\chi$  donc la perméabilité magnétique relative  $\mu_r$  est élevée. Les matériaux ferromagnétiques répondent à cette condition.
- Mais la **susceptibilité, donc la perméabilité absolue  $\mu$  est non linéaire** : en conséquence la réponse  $B = f(H)$  n'est pas linéaire.

En conclusion, pour étudier le comportement des différentes grandeurs, il faut trouver un modèle simplifiant ces comportements non linéaires : il faut **linéariser la caractéristique  $B = f(H)$**  du matériau.

## I.2. Courbe réelle des matériaux ferromagnétiques

La courbe d'aimantation traduit le comportement non linéaire des matériaux pour lesquels on observe le cycle d'hystérésis.

On y distingue deux domaines essentiels :

- une zone saturée ;
- une zone quasi-linéaire.

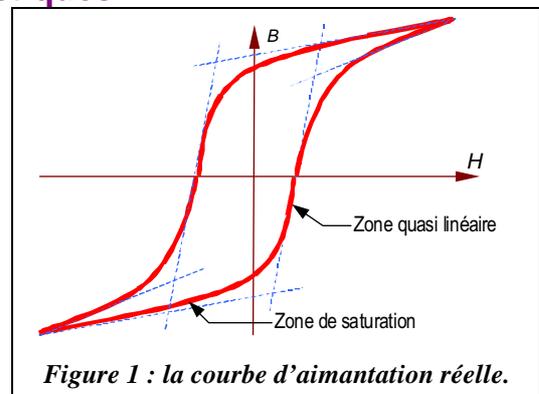
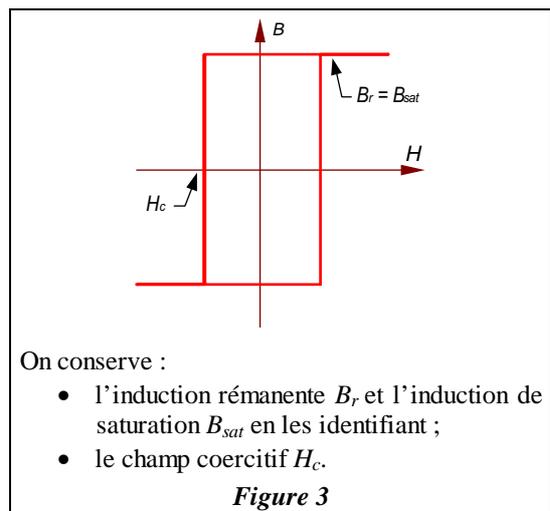
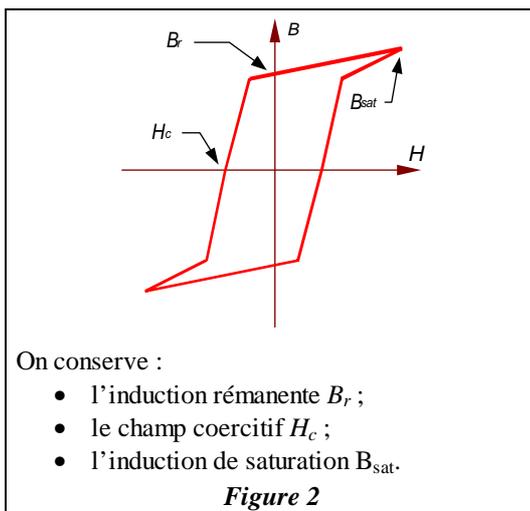


Figure 1 : la courbe d'aimantation réelle.

## I.3. Différentes linéarisations

On peut effectuer des simplifications plus ou moins partielles qui conduisent chacune à leur modèle. Les simplifications sont classées en considérant les grandeurs conservées parmi  $B_r$ ,  $H_c$  et  $B_{sat}$ .



Mais on peut considérer que le champ coercitif est toujours nul comme l'indiquent les figures suivantes.

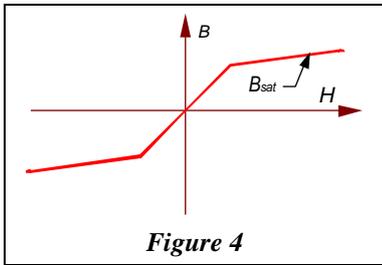


Figure 4

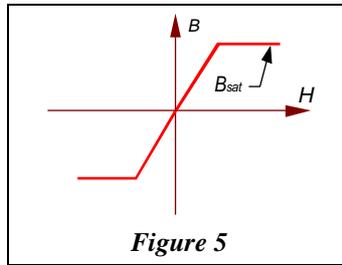


Figure 5

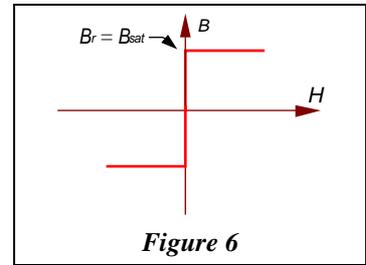


Figure 6

Dans la dernière modélisation, le matériaux est totalement linéaire (Figure 7). On a alors :  $B = \mu_0 \mu_r H$  [1], où la perméabilité relative  $\mu_r$  est constante. Si ce coefficient est très grand au point d'être considéré infini, on dit alors que le matériau est idéal.

Cette hypothèse considérant le matériau linéaire est la plus avancée.

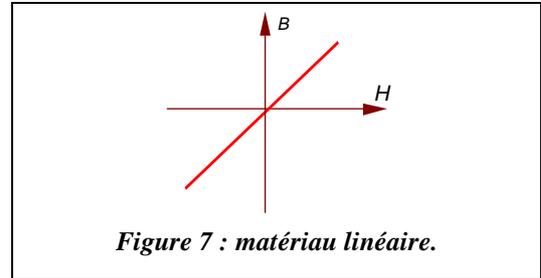


Figure 7 : matériau linéaire.

## II. Les circuits magnétiques parfaits

Dans un circuit magnétique réel, pour tendre vers un modèle simplifié, on vérifie une série d'hypothèses qui conduisent à la notion de circuit magnétique parfait (CMP).

### II.1. Hypothèses sur les lignes de fuite

Le champ d'excitation est créé par un bobinage parcouru par un courant  $i$  (théorème d'Ampère).

Si tout le champ créé est uniquement destiné au circuit magnétique, on dit qu'il n'y a pas de fuites. Dans la pratique, et pour des raisons de réalisation, il existe un intervalle entre le bobinage et le circuit magnétique. A cet endroit, le champ d'induction existe mais ne parcourt pas le fer du circuit magnétique mais l'air de l'interstice.

Les fuites induisent des pertes car ce sont des ampères-tours qui ne créent pas d'induction dans le circuit magnétique et par conséquent dans l'entrefer pour lequel l'induction est destinée.

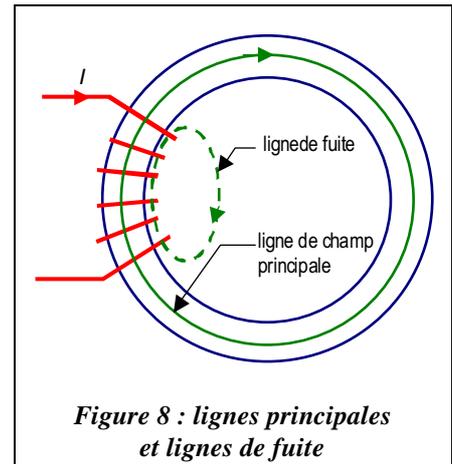


Figure 8 : lignes principales et lignes de fuite

Dans la pratique, on effectue un bobinage minimisant les fuites. Les spires sont enroulées au plus près du circuit magnétique et les spires sont jointives (coefficient de remplissage  $k_r \approx 1$ ) ;

**Dans un circuit magnétique parfait, on considère que les fuites sont nulles.**

### II.2. Hypothèses sur le vecteur induction $\vec{B}$

L'induction magnétique est uniforme, constante et orthogonale à chaque section droite du circuit magnétique.

**Conséquence :** 
$$\left. \begin{array}{l} \Phi = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot \vec{n} dS \\ \text{or } \vec{B} \cdot \vec{n} = B \end{array} \right\} \text{ donc avec } B \text{ uniforme : } \Phi = B \iint dS = B.S \text{ [2]}$$

### II.3. Dans l'entrefer...

Au niveau de l'entrefer, les lignes de champ se déforment. On suppose donc que le champ reste dans le prolongement de l'entrefer, c'est à dire que la section de l'entrefer et du circuit magnétique sont les mêmes (Figure 9). C'est une autre manière de considérer que les fuites sont nulles au niveau de l'entrefer.

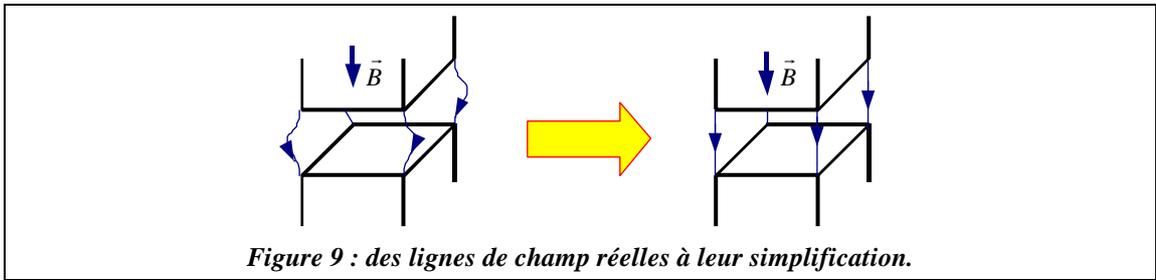


Figure 9 : des lignes de champ réelles à leur simplification.

## II.4. Et le matériau ?...

Le matériau est linéaire, la relation [1] s'applique, c'est à dire que la perméabilité relative  $\mu_r$  est constante, donc  $B$  et  $H$  sont proportionnels.

## II.5. Conclusion

Pour comprendre et mémoriser le schéma général qui conduit de la grandeur électrique (courant) à l'induction ( $B$ ), on peut retenir le schéma de la **Figure 10**.

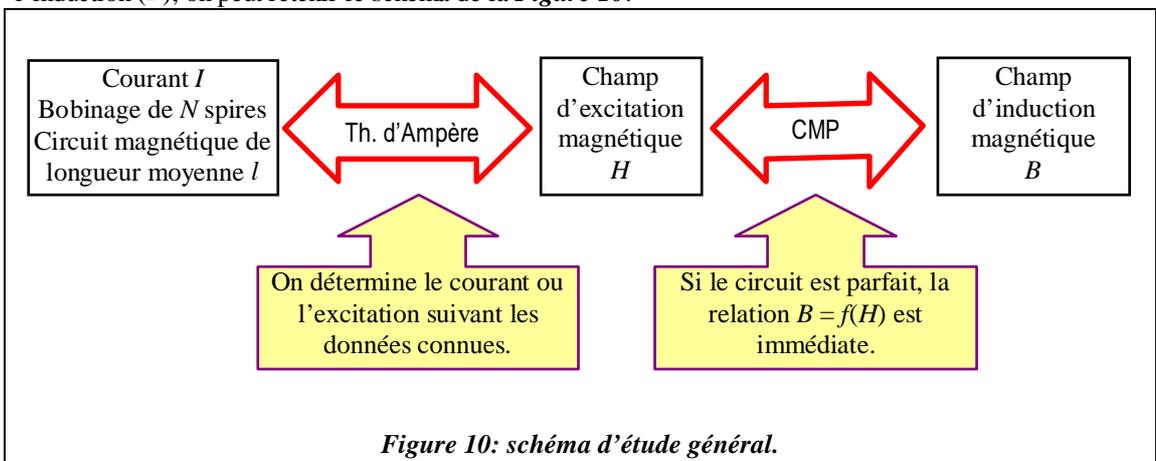


Figure 10: schéma d'étude général.

## III. Traduction des différentes lois pour les CMP

### III.1. Mise en place

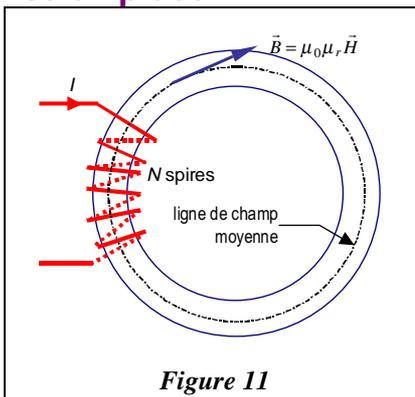


Figure 11

Dans le circuit magnétique de la **Figure 11**,  $\vec{B}$  est uniforme, constante sur une section droite du circuit magnétique et le long de la ligne de champ moyenne ( $l$ ).

D'après [2], le flux  $\Phi$  de  $\vec{B}$  à travers une section  $S$  :  $\Phi = B.S$ .

Théorème d'Ampère (sur la ligne moyenne) :  $\mathcal{E} = Hl = NI$

$$\text{On a alors : } H = \frac{B}{\mu_0 \mu_r} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{\Phi}{S}$$

$$\text{D'où la relation : } \mathcal{E} = Hl = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{l}{S} \Phi .$$

En conclusion, la mise en équation conduit à une relation linéaire entre la force magnétomotrice  $\mathcal{E}$  et le flux  $\Phi$ . Le coefficient de proportionnalité dépend du matériau ( $\frac{1}{\mu_0 \mu_r}$ ) et de la géométrie du circuit magnétique ( $\frac{l}{S}$ ). Cette constatation est la base d'une modélisation linéaire similaire à celle des circuits électriques linéaires : le modèle d'Hopkinson.

### III.2. Relation d'Hopkinson<sup>1</sup>

#### Force magnétomotrice (fmm)

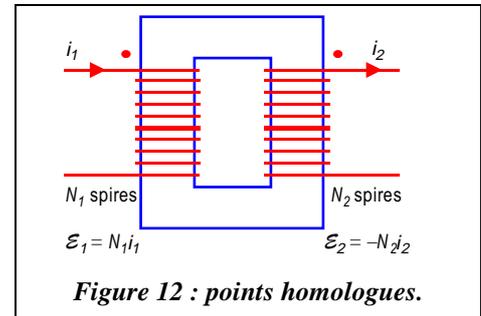
Un bobinage de  $N_k$  spires parcourues par un courant  $i_k$  crée la force magnétomotrice  $N_k \cdot i_k$ .

Si plusieurs bobinages coexistent, les forces magnétomotrices se superposent :

$$\mathcal{E} = \sum_k \alpha_k N_k i_k \quad [3]$$

Le coefficient  $\alpha_k$  traduit le sens de la fmm. Il est obtenu en appliquant la règle des points homologues :

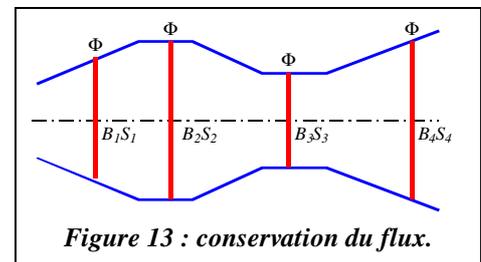
Des courants entrants par les points homologues de différents bobinages placés sur un circuit magnétique créent des forces magnétomotrices qui s'ajoutent (illustration pour deux enroulements à la **Figure 12**).



#### Écriture du flux dans le circuit magnétique

Le flux est conservatif : il traverse les différentes portions du circuit magnétique dont les caractéristiques dépendent de la géométrie (longueur, section) tel que l'illustre la **Figure 13**.

Avec [2], la conservation du flux est traduite par les relations  $\Phi = B_1 \cdot S_1 = \dots = B_i \cdot S_i$  [4]



#### Application du théorème d'Ampère sur un contour identique à la ligne de champ moyenne

Le champ d'excitation se décompose sur chaque portion du circuit, c'est à dire à chaque changement de section  $S_i$  ou de matériau de perméabilité relative  $\mu_{ri}$ . Cette portion est alors de longueur  $l_i$ .

$$\text{Lien fmm/circulation du champ sur la ligne moyenne : } \mathcal{E} = \sum_k \alpha_k N_k i_k = \oint_{(C)} H \cdot dl = \sum_i H_i l_i \quad [5]$$

$$\text{Avec [1] et [4], le champ } H_i \text{ s'écrit : } H_i = \frac{B_i}{\mu_0 \mu_{ri}} = \frac{1}{\mu_0 \mu_{ri}} \frac{\Phi}{S_i} \quad [6]$$

$$\text{En combinant [5] et [6], on obtient : } \sum_k \alpha_k N_k i_k = \left( \sum_i \frac{1}{\mu_0 \mu_{ri}} \frac{l_i}{S_i} \right) \Phi \quad [7]$$

On définit la réluctance magnétique de la portion  $i$  :  $\mathcal{R}_i = \frac{1}{\mu_0 \mu_{ri}} \frac{l_i}{S_i}$  qui s'exprime en  $H^{-1}$ .

**Remarque** : la perméance magnétique  $\mathcal{P}_i$  est l'inverse de la réluctance.

#### En résumé

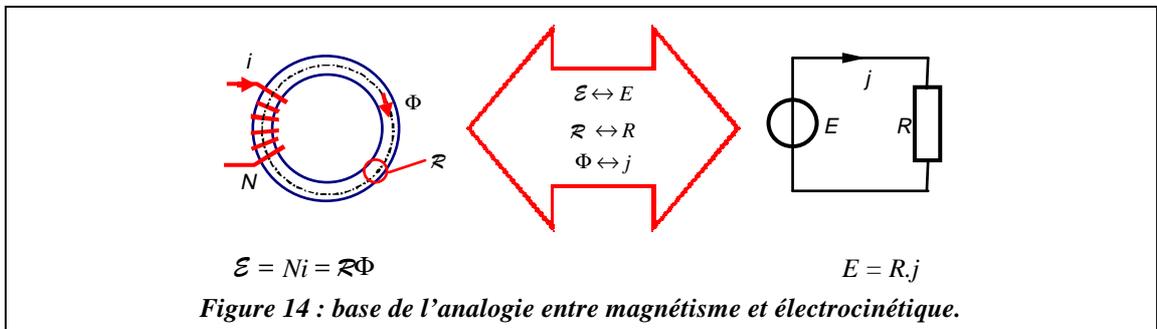
Dans un circuit magnétique composé d'une succession de réluctances  $\mathcal{R}_i$  où apparaissent différentes fmm  $\mathcal{E}_k$ , on écrit la relation d'Hopkinson qui implique le flux  $\Phi$  :

$$\sum_k (\pm) \mathcal{E}_k = \left( \sum_i \mathcal{R}_i \right) \Phi \quad [8] \text{ avec } \mathcal{R}_i = \frac{1}{\mu_0 \mu_{ri}} \frac{l_i}{S_i} \quad [9]$$

### III.3. Analogie électrique

L'observation des relations d'Hopkinson permet d'effectuer une analogie avec les circuits électriques linéaires (**Figure 14**).

<sup>1</sup> Hopkinson (),



De manière plus générale, les différents matériaux constituant les portions successives du circuit magnétique ou ses modifications dimensionnelles conduisent à différentes réluctances. Elles sont parcourues par le flux qui leur est commun.

Le **Tableau 1** reprend l'ensemble des grandeurs magnétiques et leur associe l'équivalent électrique.

Grandeurs magnétiques	Grandeurs électriques
<b>force magnétomotrice</b> : $\varepsilon = NI$ en A/m ou A.tr/m	<b>force électromotrice</b> : $E$ en Volts (V)
<b>flux d'induction</b> : $\Phi$ en Webers (Wb)	<b>Courant électrique</b> : $i$ en Ampères (A)
<b>Réluctance</b> : $\mathcal{R} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{l}{S}$	<b>Résistance</b> : $R = \rho \frac{l}{S}$
<b>ddp magnétique</b> : $\mathcal{U} = \mathcal{R}\Phi$	<b>ddp électrique</b> : $U = R.I$
<b>maille magnétique</b> : $\sum_{\text{maille}} \mathcal{U}_m = 0$	<b>Maille électrique</b> : $\sum_{\text{maille}} U_m = 0$
<b>nœud magnétique</b> : $\sum_{\text{nœud}} \Phi_n = 0$	<b>nœud électrique</b> : $\sum_{\text{nœud}} I_n = 0$

**Tableau 1**

### III.4. Association de réluctances

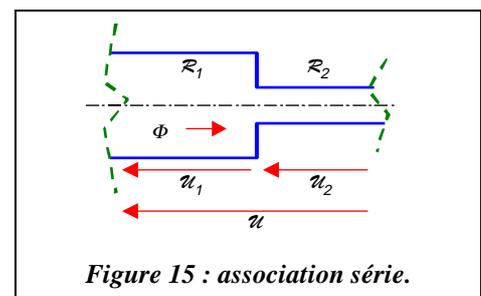
*Association série de réluctances (Figure 15)*

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$$

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{R}_1 \Phi \text{ et } \mathcal{U}_2 = \mathcal{R}_2 \Phi$$

$$\text{On a donc } \mathcal{U} = \mathcal{R}_1 \Phi + \mathcal{R}_2 \Phi = (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2) \Phi = \mathcal{R} \Phi$$

$$\text{De manière générale : } \mathcal{R} = \sum_i \mathcal{R}_i$$



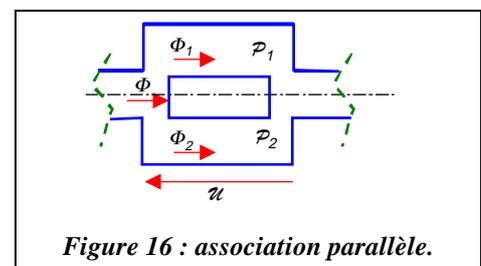
*Association parallèle de réluctances (Figure 16)*

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

$$\Phi_1 = \mathcal{P}_1 \mathcal{U} \text{ et } \Phi_2 = \mathcal{P}_2 \mathcal{U}$$

$$\text{On a donc } \Phi = \mathcal{P}_1 \mathcal{U} + \mathcal{P}_2 \mathcal{U} = (\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2) \mathcal{U} = \mathcal{P} \mathcal{U}$$

$$\text{De manière générale : } \mathcal{P} = \sum_i \mathcal{P}_i$$



## IV. Résumé / Conclusion

L'étude des circuits magnétiques linéaires est identique à celle des circuits électriques en substituant les grandeurs magnétiques aux grandeurs électriques. Toutes les lois et théorèmes de l'électrocinétique sont donc applicables.