LES METHODES CLASSIQUES DE TRAITEMENT DU SIGNAL

Le signal est noyé dans un bruit aléatoire , il s'agit d'améliorer le rapport signal sur bruit

Le signal de sortie peut être le signal lui même ou un signal différent mais dont l'amplitude lui est proportionnelle . Cette extraction du signal peut être obtenue grâce à un filtre linéaire ou non .

TRAITEMENTS LINEAIRES

Nous avons vu plus haut que l'amélioration maximale était obtenue par un filtrage optimal (ou adapté) Un tel filtrage est réalisé le plus souvent par filtrage numérique transversal dont les coefficients sont les points prélevés sur le signal inversé. Ce n'est possible de façon rigoureuse que pour un signal enregistré , ou ne dépendant pas du temps, une image par exemple .

Il existe un cas particulier important , c'est le cas ou le signal est sinusoïdal. Nous avons montré alors , c'est évident , que le filtre adapté est un passe bande idéal de largeur de bande nulle centré sur la fréquence du signal .Un tel filtre n'est bien sûr pas réalisable, il correspondrait en effet à un coefficient de qualité infini, et il serait difficile de maintenir la fréquence centrale du filtre égale à celle du signal, on s'en approche par la méthode de la détection synchrone .

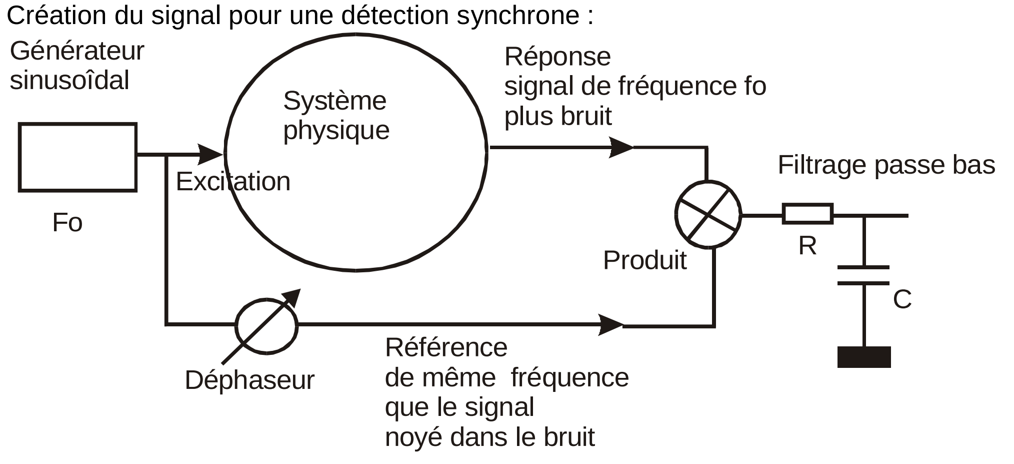
DETECTION SYNCHRONE

Le signal utile est une sinusoïde dont la fréquence est connue parfaitement , noyé dans un bruit aléatoire additif. La forme étant connue la seule inconnue est l'amplitude du signal et éventuellement sa phase .

Il n'est pas possible de fabriquer une sinusoïde dont la fréquence est rigoureusement égale à celle d'un signal inconnu noyé dans un bruit. (pour extraire le signal du bruit il faudrait disposer d'une référence de même fréquence qui ne peut être fabriquée que si l'on a extrait le signal)

Pour lever cette difficulté le signal est fabriqué en excitant le système physique à étudier par une perturbation sinusoïdale. Le signal de réponse est alors peut être noyé dans le bruit, mais sa fréquence est forcément celle de l'excitation qui est connue. Le signal réponse peut bien sûr ne pas être sinusoïdal , c'est alors l'amplitude de sa composante fondamentale qui est recherchée. Pour déterminer sa forme exacte nous verrons plus loin une autre méthode .

Création du signal pour une détection synchrone :



Principe

Le signal de sortie bruité

$X = a \cos 2\pi f_0 t + b$

est multiplié par la référence sinusoïdale Le produit contient une composante continue qui est isolée par filtrage passe bas. Un tel filtrage peut être aussi sélectif que l'on veut, il suffit d'augmenter la constante de temps . On notera que l'information obtenue est une amplitude continue et non une sinusoïde sortie du bruit .

Performances

La phase du signal recherché n'est pas connue il peut donc exister entre signal et référence un déphasage quelconque et inconnu. Or le produit $\cos 2\pi f_0 t.\cos(2\pi f_0 t+\varphi)$ à une moyenne qui peut prendre toute valeur entre -1 et +1 en passant par 0 pour un déphasage de $\pi/2$. La solution consiste à augmenter le niveau de l'excitation de façon à obtenir un signal d'amplitude assez grande et de régler manuellement le déphasage (voir figure) jusqu'à obtenir un niveau continu de sortie maximal. Ce réglage étant effectué on supposera par la suite que signal et référence sont en phase.
(Dans le cas ou ce réglage est impossible on peut faire une double détection synchrone avec deux références en quadrature , si A et B sont les amplitudes obtenues en sortie sur ces deux voies , l'amplitude du signal est calculée par $\sqrt{A^2+B^2}$)

Avec un signal bruité $x(t)=a\cos 2\pi f_0 t+b(t)$

Le signal à la sortie du multiplieur est : $y = A.\cos 2\pi f_0 t.[a.\cos 2\pi f_0 t + b(t)]$

Le bruit étant aléatoire le spectre de y ne peut être calculé que par l'intermédiaire du théorème de Wiener Kintchine .

Soit : $R_Y(\tau) = A^2.\overline{\cos 2\pi f_0 t.[a.\cos 2\pi f_0 t + b(t)].\cos 2\pi f_0 (t-\tau).[a.\cos 2\pi f_0 (t-\tau) + b(t-\tau)]}$

Qui se développe en : (notation simplifiée

$$A^2.\overline{\cos t.\cos t'[a^2\cos t\cos t' + ab\cos t' + ab'\cos t + bb']}$$

C'est à dire :

$$A^2.\overline{a^2\cos^2 t\cos^2 t' + ab\cos t\cos^2 t' + ab'\cos t\cos^2 t' + \cos t\cos t' bb'}$$

Signal et bruit étants indépendants la moyenne de leur produit est le produit de leur moyenne, les deux termes intermédiaires sont alors nuls puisque b à une moyenne nulle . Il reste

$$A^2.[\overline{\frac{a^2}{4}(1+\cos 2t)(1+\cos 2t')} + \overline{\cos t.\cos t'}.\overline{bb'}] = A^2.[\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8}\cos 2\pi 2 f_0\tau + \frac{1}{2}\cos 2\pi f_0\tau.R_B(\tau)]$$

qui par transformation de Fourier donne :

Une raie à l'origine d'amplitude $A^2\dfrac{a^2}{4}$

Deux raies à $\pm 2f_0$

Un spectre continu provenant du troisième terme

$$\frac{A^2}{2}\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]\otimes S_B(f) = \frac{A^2}{4}[S_B(f-f_0)+S_B(f+f_0)]$$

Si l'on admet que le bruit est de type blanc filtré de fréquence de coupure fc le résultat est représenté sur la figure ci dessous :

La DSP du bruit est

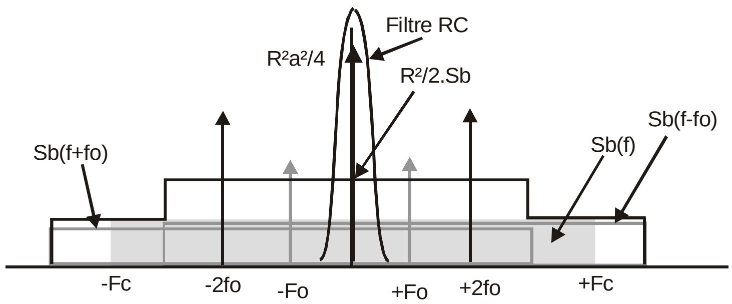
$$B = \frac{\sigma_B^2}{2f_C}$$

La DSP de la composante continue du spectre de y est (figure)

$$\frac{A^2}{2}S_B(0) = \frac{A^2}{2}\frac{\sigma_B^2}{2f_C} = \frac{A^2\sigma_B^2}{4f_C}$$

Pour un RC grand (filtrage fort) la

Spectre de puissance du signal après multiplication par la référence .



puissance de bruit à la sortie du filtre est : donc

$$\frac{A^2\sigma_B^2}{4f_c}\frac{1}{2RC}$$

Le terme proportionnel au signal est la composante à l'origine $A^2\frac{a^2}{4}$

D'ou un rapport signal bruit en sortie $\dfrac{A^2\frac{a^2}{4}}{A^2\frac{\sigma_B^2}{8RCf_C}} = 4RCf_C\rho_E$

L'amélioration du rapport signal sur bruit est 4RCfc que l'on peut encore écrire en introduisant la fréquence de coupure du filtre RC f_f=1/2πRC $\eta = \frac{2}{\pi}\frac{f_C}{f_F}$ On retient que cette amélioration du rapport signal bruit est dans le rapport des bandes passantes du filtre et du bruit . Elle peut être aussi grande que l'on veut , il suffit d'augmenter la constante de temps .

La détection synchrone est une méthode très employée , le produit peut être remplacé par un découpage En effet le produit d'un signal par un créneau carré symétrique s'écrit :

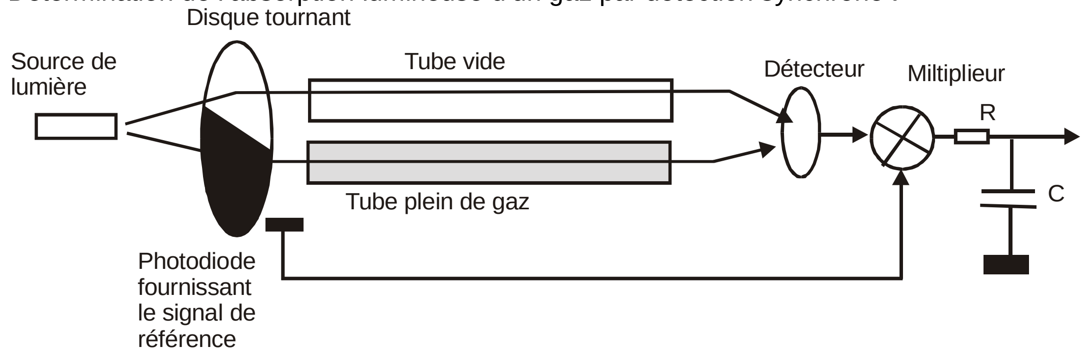
$$s(t).\frac{4}{\pi}\left[\cos\omega_O t - \frac{1}{3}\cos 3\omega_O t + \frac{1}{5}\cos 5\omega_O t + ...\right]$$

expression qui contient le produit de s(t) par la sinusoïde de pulsation ω_0

Exemple d'application.

Dans l'expérience ci dessous on cherche à mesurer l'absorption de la lumière à la traversée d'une colonne de gaz. Grâce à un disque tournant la lumières est envoyée alternativement soit dans un tube vide , soit dans celui qui contient le gaz. La lumière est légèrement atténuée à la traversée du second et sur le détecteur le signal est un carré ayant la fréquence du découpage. Ce signal a une amplitude très faible pour un gaz presque incolore , il est noyé dans le bruit du détecteur mais on peut le sortir par détection synchrone comme le montre la figure .

Détermination de l'absorption lumineuse d'un gaz par détection synchrone .



TRAITEMENTS NON LINEAIRES

Le nombre de non linéarités imaginables n'étant pas limité il en est de même des traitements qui peuvent être proposés mais en pratique seules sont utilisées les méthodes faisant appel à la corrélation, autocorrélation ou intercorrélation.

Problèmes posés par la réalisation des corrélateurs

La fonction d'autocorrélation est définie par :

$$R_{XY}(\tau)=E[x(t).y(t-\tau)]=Lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t).y(t-\tau)dt$$

or la durée d'intégration ne peut pas être infinie. On ne peut l'effectuer que pour un temps fini, on commet donc une erreur :

$$\varepsilon=R_{XY}(\tau)-R_{XY}(T,\tau)$$

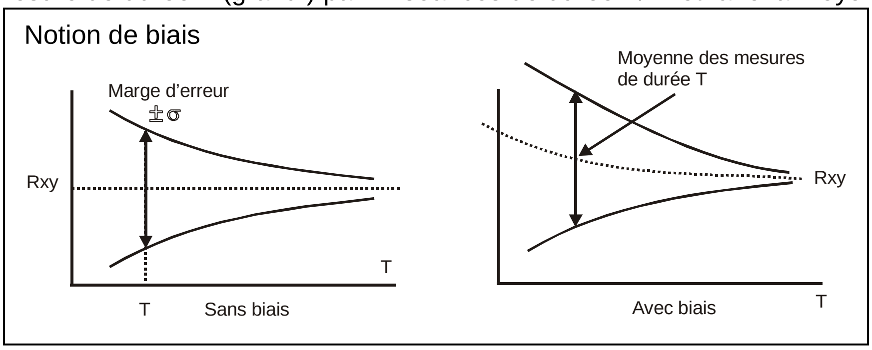
avec $R_{XY}(T,\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T x(t).y(t-\tau)dt$

Deux mesures successives de durée T donneront des résultats légèrement différents pour un signal aléatoire, $R_{XY}(T,\tau)$ est une variable aléatoire . Pour diminuer l'erreur il faut bien sûr augmenter T , mais n'est il pas possible d'obtenir le même résultat en effectuant plusieurs mesures avec T faible et en moyennant les résultats . C'est parfois possible, parfois non , c'est un problème de **biais**.

Notion de biais

Pour une valeur de T le résultat est nous venons de le voir une grandeur aléatoire , son écart type est d'autant plus grand que T est faible et tend vers zéro pour T $\Rightarrow\infty$, mais cette évolution de la barre d'erreur est différente suivant les cas .

Dans le cas de la figure ci contre à gauche , la barre d'erreur reste centrée sur la valeur atteinte pour T infini ,c'est à dire la vraie valeur de l'intercorrélation. La moyenne d'un grand nombre de mesures de même durée T est la valeur exacte cherchée . Dans ce cas on peut remplacer une mesure de durée T (grand) par N séances de durée T/N et faire la moyenne des résultats .



Par contre dans le cas de droite , la moyenne d'un grand nombre de mesures de durée T ne tend pas vers la valeur exacte de R_{XY} .La mesure est entachée de biais .

Il faut toujours s'assurer que la méthode de mesure utilisée est sans biais avant de faire une extrapolation à partir d'une série de résultats .

M BENDAT à Grenoble à fait une thèse sur la détermination de l'erreur ε, il a montré dans un cadre assez général qu'elle n'est fonction que de la largeur du spectre et non de sa position. Une mesure de durée T sur un signal dont le spectre BF s'étend de 0 à 1kHz conduit à la même erreur qu'une série de mesures de même durée sur un signal à bande étroite Δf=1kHz autour de 1MHz .

Ce résultat peut être retrouvé en supposant le bruit gaussien.

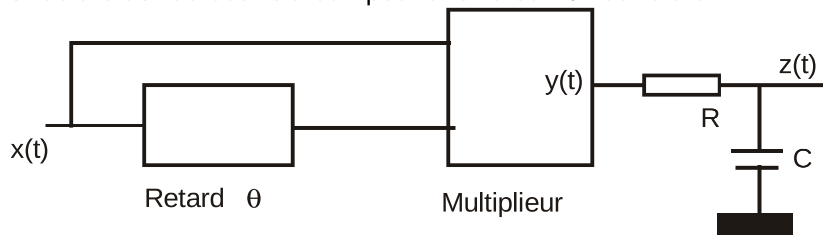
Le dispositif expérimental est en effet constitué d'une cellule de retard τ , d'un multiplieur suivi d'un intégrateur qui peut se réduire à un simple filtre RC . Plaçons nous dans le cas de l'autocorrélation .

Le signal à la sortie du multiplieur est :

$$y=x(t).y(t-\tau)$$

Sa valeur moyenne est la fonction d'autocorrélation cherchée et l'écart type du bruit résiduel à la sortie du filtre est l'erreur ε ou plus précisément l'écart type de cette erreur .

Structure de l'autocorrélateur pour une valeur θ du retard



$$R_X(\theta) = \overline{z(t)} = \overline{y(t)}$$

Or $R_Y(\tau) = \overline{x(t)x(t-\tau)x(t-\theta)x(t-\tau-\theta)}$

Si x est gaussien cette expression se développe en :

$$R_Y(\tau) = \overline{x(t)x(t-\tau)}.\overline{x(t-\theta)x(t-\tau-\theta)} + \overline{x(t)x(t-\theta)}.\overline{x(t-\tau)x(t-\tau-\theta)} + \overline{x(t)x(t-\tau-\theta)}.\overline{x(t-\tau)x(t-\theta)}$$

soit

$$R_Y(\tau) = R_X^2(\theta) + R_X^2(\tau) + R_X(\tau+\theta).R_X(\tau-\theta)$$

L'autocorrélation étant maximale pour θ=0 nous la calculerons pour cette valeur :

$$R_Y(\tau) = R_X^2(0) + 2R_X^2(\tau) = \sigma_X^4 + 2R_X^2(\tau)$$

et par Wiener Kintchine le spectre :

$$S_Y(f) = \sigma_X^4\delta(f) + 2S_X(f) \otimes S_X(f)$$

c'est ce que nous avions trouvé pour un quadrateur .

La composante continue est isolée par le filtre RC c'est la fonction d'autocorrelation cherchée , sa puissance est son carré . Et l'erreur est le bruit résiduel à la sortie du filtre . Le filtrage est fort , cette puissance est :

$$\frac{S_Y(0)}{2RC}$$

Avec $S_Y(0) = \dfrac{\sigma_X^4}{f_C}$

En effet la DSP du bruit blanc filtré x est comme plus haut $B = \dfrac{\sigma_X^2}{2f_C}$ et

$$S_Y(0) = 4B^2 f_C = 4\left(\frac{\sigma_X^2}{2f_C}\right)^2 . f_C$$

Donc le bruit résiduel (en puissance) $\dfrac{\frac{\sigma_X^4}{f_C}}{2RC} = \dfrac{\sigma_X^4}{2RCf_C}$

Le signal utile étant σ_X^4 le rapport signal sur bruit a pour expression .

$$\frac{S}{B} = 2RCf_C$$

et en amplitude $\dfrac{R_X(0)}{\varepsilon} = \sqrt{2RCf_C}$

Mais il faut remarquer que le signal de fréquence de coupure fc est décrit par 2fc échantillons par seconde , soit N=2RCfc échantillons pendant une constante de temps . Or un intégrateur RC peut être considéré comme un intégrateur imparfait qui oublie au delà d'une durée de l'ordre de RC .Le

nombre d'échantillons pris en compte pour la mesure est donc de l'ordre de N et l'erreur relative de l'ordre de $\sqrt{N}$ .C'est un résultat très général que nous retrouverons plus loin.
Si l'on appelle T la durée d'intégration le résultat précédent est de l'ordre de :

$\frac{R_X(0)}{\varepsilon} \approx \sqrt{\Delta f.T}$ ou Δf est la largeur spectrale du signal et T la durée de mesure ; c'est le résultat auquel à aboutit BENDAT . (erreur relative en $\frac{1}{\sqrt{BT}}$)

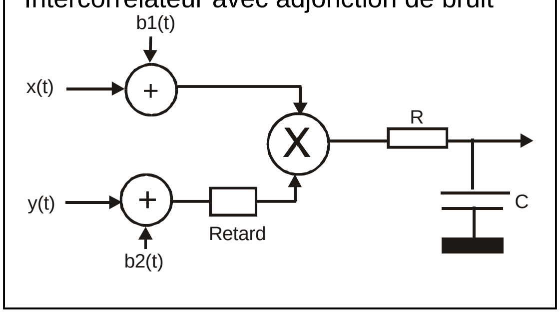
Les corrélateurs à adjonction de bruit .

*

Nous avons vu plus haut que pour une quantification grossière l'erreur commise sur le calcul de la fonction d'autocorellation d'un signal gaussien était très faible. Il est donc intéressant de travailler avec des signaux dont la densité de probabilité est proche d'une gaussienne. Un tel résultat peut être obtenu en ajoutant au signal un bruit gaussien de caractéristiques convenables .

Un intercorrelateur avec adjonction de bruit est représenté sur la figure ci contre.

Intercorrélateur avec adjonction de bruit



Le multiplicateur effectue :

$$[x(t)+b_1(t)][y(t-\tau)+b_2(t-\tau)]$$

dont la valeur moyenne est

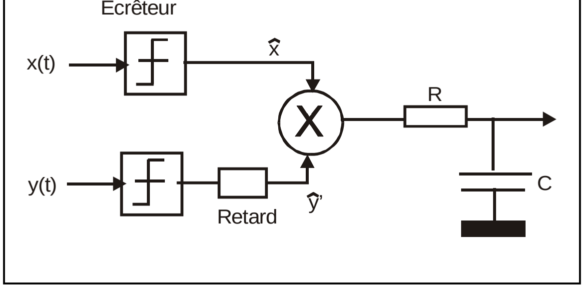
$$R_{XY}(\tau)+R_{XB2}(\tau)+R_{YB1}(\tau)+R_{B1B2}(\tau)$$

Si les signaux sont indépendants des bruits et ces derniers non corrèles entre eux le résultat est la fonction d'intercorrélation cherchée. Il faut remplir ces conditions mais pour une précision déterminée le temps de calcul nécessaire est plus important qu'en absence de bruit.

Corrélateurs à écrêtage

Pour un signal gaussien toute l'information sur son spectre , donc aussi sa fonction d'autocorrélation , est contenue dans ses passages par zéro. Il est donc possible d'effectuer un écrêtage des signaux avant d'effectuer leur produit, ce qui simplifie beaucoup ce dernier .DE tels corrélateurs à écrêtage ont été construits à l'époque ou l'opération de multiplication de deux mots longs prenait beaucoup de temps , ce qui n'est plus le cas aujourd'hui.

Intercorrélateur à écrêtage pour signaux gaussiens.



On peut montrer que :

$$R_{\hat{X}\hat{Y}}(\tau)=\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{R_{XY}(\tau)}{\sqrt{R_X(0).R_Y(0)}}$$

il est donc possible de retrouver la fonction d'intercorrélation de x et y à partir de celle des signaux écrêtés :

$$R_{XY}(\tau)=\sqrt{R_X(0).R_Y(0)}.\sin\frac{\pi}{2}R_{\hat{X}\hat{Y}}(\tau)$$

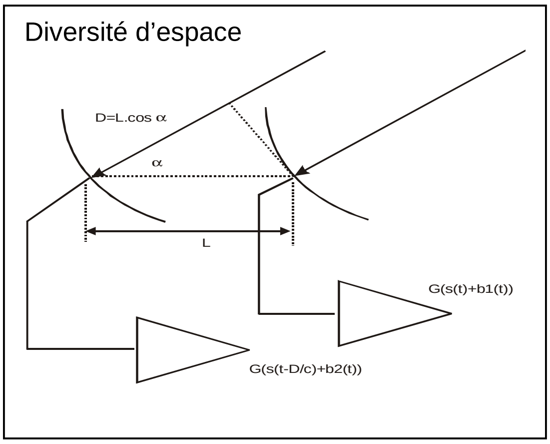
mais ceci n'est vrai que pour des signaux gaussiens . Cette technique est actuellement abandonnée.

Les situations les plus classiques

1 Le signal utile est un bruit inconnu noyé dans un autre bruit inconnu

C'est la situation rencontrée par un radioastronome qui étudie le signal émis par un objet astrophysique , quasar ou radio galaxie. Le signal très faible est un bruit qui est masqué par le bruit de l'antenne, et de l'amplificateur . A la sortie de la chaîne d'amplification ces deux bruits ont évidemment le même spectre (la bande passante du récepteur) et aucune méthode de filtrage ne peut les séparer.

La seule méthode est ce que l'on appelle diversité d'espace, deux récepteurs indépendants sont dirigés vers la source , ils délivrent des signaux identiques , à un retard près , noyés dans des bruits indépendants. L'amélioration du rapport S/B est obtenue par une intercorrélation.



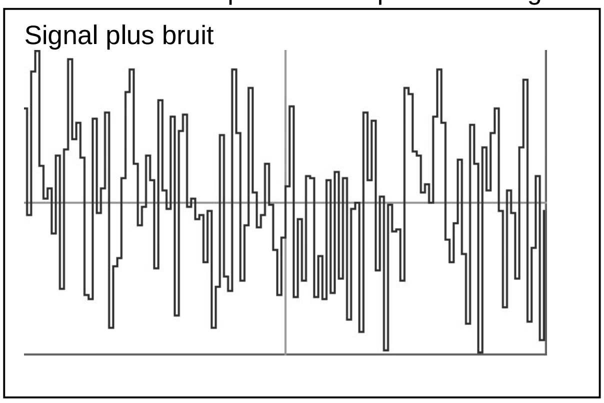
A la sortie de l'amplificateur relié à l'antenne de droite le signal est de la forme
G .[s(t)+b1(t)] ou G est le gain de la chaîne
A la sortie de l'amplificateur relié à l'antenne de gauche
G[s(t-D/c)+b2(t)]
Le signal est en effet retardé de D/c car cette antenne est plus éloignée de la source .
Au terme G près qui n'intervient pas la fonction d'intercorrélation entre les deux signaux est :

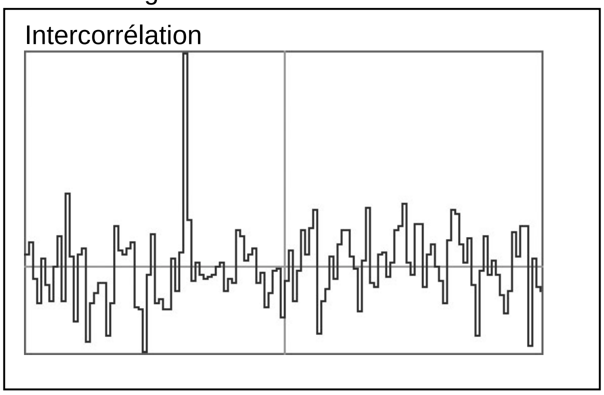
$$R_{S+B1,S'+B2}(\tau) = \overline{\left[s(t)+b1(t)\right]\left[s(t-\frac{D}{c}-\tau)+b2(t-\tau)\right]}$$

soit $$R_S(\tau+\frac{D}{c}) + R_{SB1} + R_{SB2} + R_{B1B2}$$

Les termes d'intercorrélation signal bruit sont nuls ,ainsi que l'intercorrélation des 2 bruits .IL ne reste que le premier qui est maximum pour $\tau = -\frac{D}{c}$ L'information obtenue n'est bien sûr pas la forme du signal mais sa puissance .

Les deux figures ci dessous représentent d'abord l'un des mélanges des 2 bruits , de même amplitude dans ce cas et à droite le résuktat de l'intercorrélation. On voit nettement le pic de corrélation dont la position indique le décalage entre les deux signaux à l'entrée.





Cette méthode peut être utilisée pour améliorer le rapport signal sur bruit d'un signal quelconque en utilisant deux amplificateurs indépendants et en effectuant une intercorrélation des sorties. Le calcul montre qu'avec 2 voies indépendantes on ne gagne que 3dB .

2 Méthode de Wiener

Il s'agit d'une méthode particulièrement astucieuse mais difficile à mettre en œuvre et qui ne fonctionne de toute façon que pour éliminer un signal parasite déterministe .

Le signal reçu est x(t)=s(t)+b(t)

On considère le signal parasite b(t) comme le signal de sortie d'un filtre dont le signal d'entrée $b_1(t)$ est de spectre blanc. Le filtre considéré a une réponse impulsionnelle h(t) que l'on va déterminer.

$$b(t) = b_1(t) \otimes h(t)$$

Calculons alors la fonction d'intercorrélation du signal d'entrée et du signal inconnu b_1.

$$R_{XB1}(\tau) = \overline{x(t).b_1(t-\tau)} = \overline{[s(t)+b(t)]b_1(t-\tau)}. = R_{BB1}(\tau)$$

car signaux et bruit sont indépendants .

Mais pour un système linéaire : $R_{YX}(\tau) = h(\tau) \otimes R_X(\tau)$

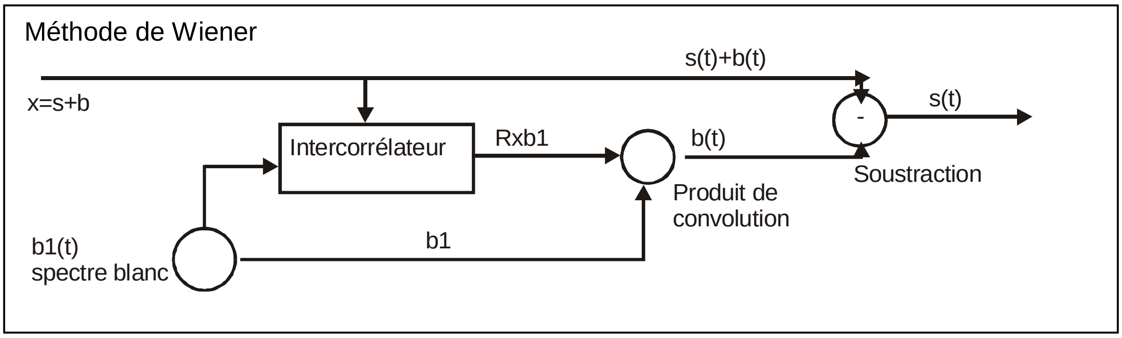
Donc $R_{BB1}(\tau) = h(\tau) \otimes R_{B1}(\tau)$

Mais le signal b1 est blanc $R_{B1}(\tau) = P_{B1}.\delta(\tau)$

En choisissant un signal b1 de puissance unité :

$$R_{XB1}(\tau) = R_{BB1}(\tau) = h(\tau) \otimes \delta(\tau) = h(\tau)$$

Le signal b1 peut être fabriqué et x est connu , d'ou le schéma suivant :



Pour que le bruit soit correctement éliminé par soustraction en sortie il faut que sa valeur calculée soit très précise, or une erreur (en particulier de phase) est inévitable lors du calcul de l'intercorrélation. En pratique la méthode est inutilisable mais elle est à l'origine de techniques plus complexes qui ont été décrites et exploitées.

3 Recherche d'un signal périodique noyé dans un bruit

On sait seulement que le signal recherché est périodique sans connaître sa période . L'exemple que l'on cite souvent est le bruit d'un gros moteur de bateau dont l'un des engrenages à perdu une dent . Cet engrenage défectueux crée une composante périodique de bruit noyée dans le bruit beaucoup plus fort du reste de la mécanique .

On ne dispose que d'un seul signal et la seule opération possible est une autocorrélation .

x = s + b

Soit $R_X(\tau) = \overline{(s+b)(s'+b')} = R_S(\tau) + R_{SB}(\tau) + R_{BS}(\tau) + R_{\mathbf{B}}(\tau)$

Mais bruit et signal sont indépendants, les deux termes d'intercorrélation sont nuls .Il ne reste que l'autocorrélation du signal et celle du bruit. Or le signal étant périodique à une fonction d'autocorrelation elle même périodique (d'après le théorème de WK) alors que l'autocorrélation du bruit tend vers zéro si le retard τ tend vers l'infini. Il suffit donc d'effectuer une autocorrélation pour de grands retard pour voir sortir la fonction d'autocorrélation du bruit.

Inconvénient ; l'autocorrélation à grand retard occupe beaucoup d'espace mémoire dans le calculateur et le signal obtenu n'est pas le signal d'entrée mais son autocorrélation qui a une forme différente (sauf pour une sinusoïde) .

4 Le signal recherché est périodique de forme inconnue mais de période connue.

Période connue cela veut dire que l'on est capable de fabriquer un signal de référence r(t) de même fréquence que le signal recherché. Il est alors possible d'effectuer une intercorrélation entre le signal bruité et cette référence :

$$R_{XR}(\tau) = \overline{r(t).x(t-\tau)} = \overline{r(t).[s(t)+b(t)]} = R_{RS}(\tau) + R_B(\tau)$$

Mais le bruit est undépendant du signal , le second terme est donc nul et le second donne l'information sur le signal puisque l'on connaît r(t) .

Cependant comme plus haut le résultat de l'opération n'est pas dans le cas général le signal lui même .C'est par contre le cas si la référence est un peigne de Dirac . En effet :

$$R_{RX}(\tau) = \overline{\left(\sum_K \delta(t-KT)\right) x(t-\tau)} = \overline{\sum_K x(KT-\tau)} = \overline{\sum_K [s(KT-\tau)+b(KT-\tau)]}$$

mais le signal est périodique et en phase avec le peigne utilisé ,

$$s(KT-\tau) = s(\tau)$$

il vient donc :

$$R_{RX}(\tau) = s(\tau) + \overline{\sum_K b(KT-\tau)}$$

le premier terme est une valeur du signal au cours d'une période et le second, moyenne du bruit tend vers 0 si l'intégration est poursuivie pendant un temps infini .

Si le calcul est effectué sur N périodes le second terme apporte une contribution non nulle :

$$R_{RX}(N,\tau) = s(\tau) + \frac{1}{N}\sum_1^N b(KT-\tau)$$

Calcul de l'amélioration du rapport S/B obtenue .

Pour une valeur fixée de N le résultat est une variable aléatoire dont la variance est l'incertitude sur le résultat donc le bruit résiduel .

La méthode consiste à échantillonner le signal brut reçu x(t) une fois par période sur N périodes et à calculer la moyenne du résultat .

Chaque échantillon prélevé $x(KT-\tau) = s(KT-\tau) + b(KT-\tau)$

Est une valeur d'uns variable aléatoire dont la variance est

$$\sigma_X^2 = \overline{(x-\overline{x})^2} = \overline{x^2} + 2\overline{x\overline{x}} + (\overline{x})^2$$

mais $\overline{x} = s(\tau)$ et $\overline{x\overline{x}} = \overline{(s+b)s} = \overline{s^2} + \overline{sb} = s^2 + \overline{s}\,\overline{b} = s^2$

avec $\overline{x^2} = \overline{(s+b)^2} = \overline{s^2 + 2sb + b^2} = s^2 + 0 + \sigma_B^2$

En reportant dans la première expression on obtient le résultat que l'on peut considérer comme évident :

$$\sigma_X^2 = \sigma_B^2$$

On ajoute maintenant N échantillons ce qui donne une nouvelle variable aléatoire dont la variance est la somme des variances , nous noterons :

$$\sigma_{NX}^2 = N\sigma_X^2 = N\sigma_B^2$$

ce qui correspond à un écart type $\sigma_B\sqrt{N}$

Il faut maintenant diviser par N ce qui donne une nouvelle variable aléatoire d'écart type N fois plus petit soit :

$$\sigma_{\frac{1}{N}.Nx} = \frac{\sigma_B}{\sqrt{N}}$$

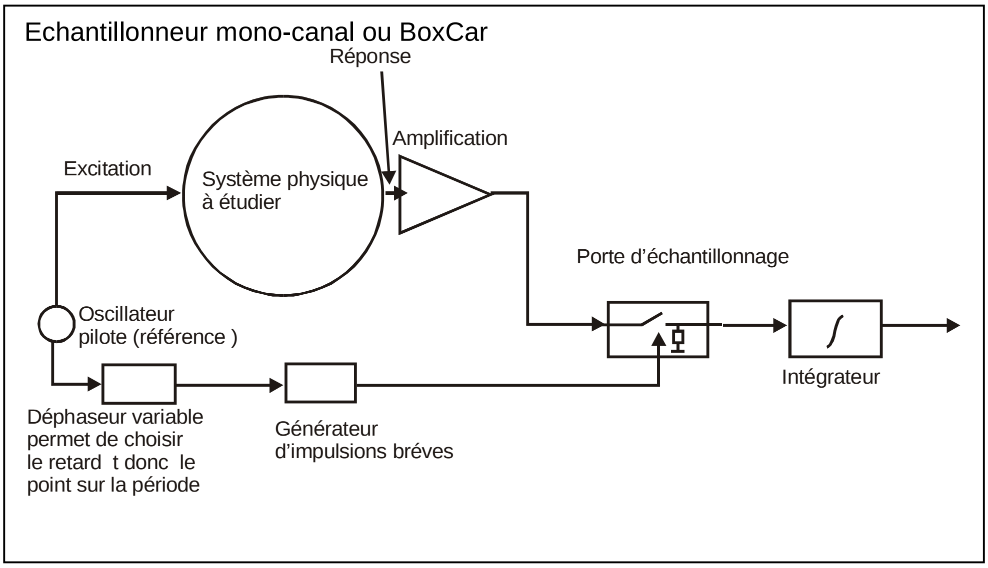
d'ou la variance du résultat final $\frac{\sigma_B^2}{N}$

L'amplitude du signal n'ayant pas varié, la puissance du bruit ayant été divisée par N , le rapport S/B est multiplié par N , en puissance c'est à dire par $\sqrt{N}$ en amplitude .C'est le résultat essentiel .

Réalisations pratiques

L'opération est effectué pour une seule valeur du retard τ donc un seul oint sur la période du signal .

Comme dans le cas de la détection synchrone la seule façon d'assurer une synchronisation parfaite entre une référence et un signal inconnu perdu dans le bruit est de créer la signal à partir de la référence . Le signal de référence périodique est utilisé pour exciter un système physique dont la réponse est noyée dans le bruit mais de même fréquence .



Le dispositif ci dessus ne restitue qu'un point du signal , il faut balayer lentement le retard τ pour récupérer une période complète. Il est utile surtout pour des signaux impulsionnels pour lesquels seule l'amplitude compte. Il y a quelques année un échantillonneur de ce typa a été commercialisé sous le non de Boxcar .

Pour exploiter à chaque période la totalité de l'information transportée par le signal il faut faire fonctionner en parallèle de nombreux systèmes de ce type réglés chacun pour un retard différent .C'est ce que l'on appelle **échantillonneur multicanal** .

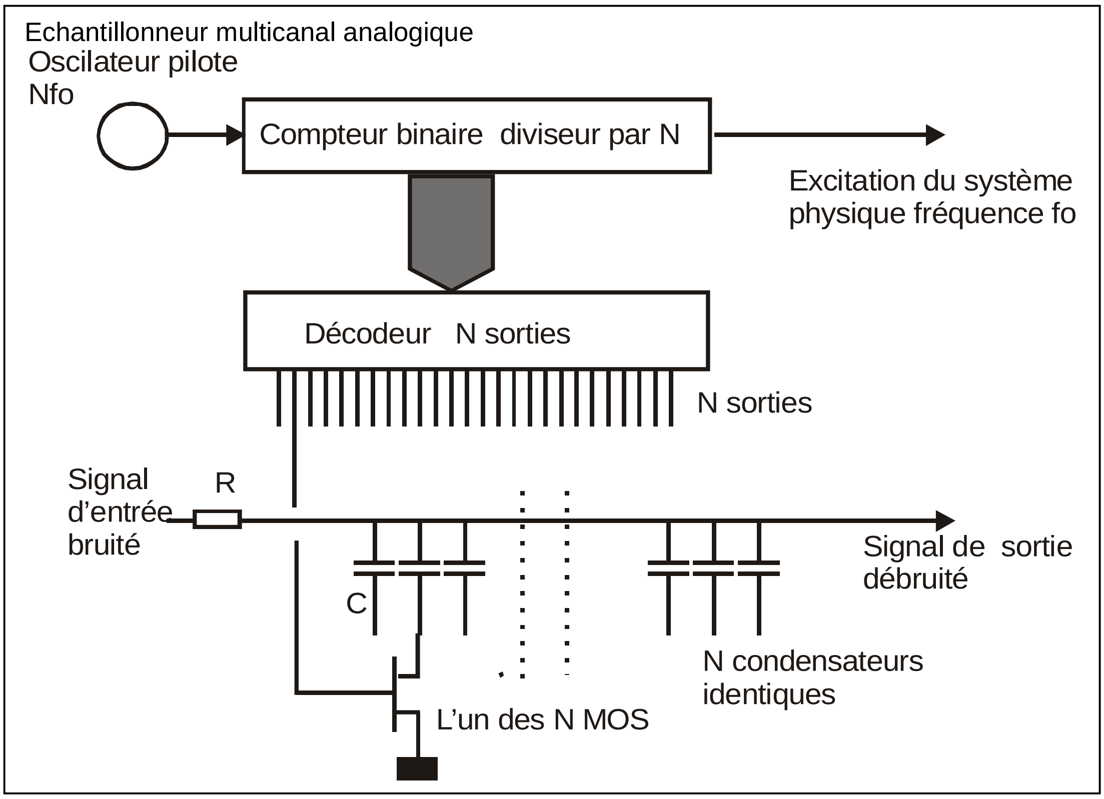
Un tel dispositif peut être réalisé soit de façon matérielle , soit par voie logicielle .

Echantillonneur multicanal analogique

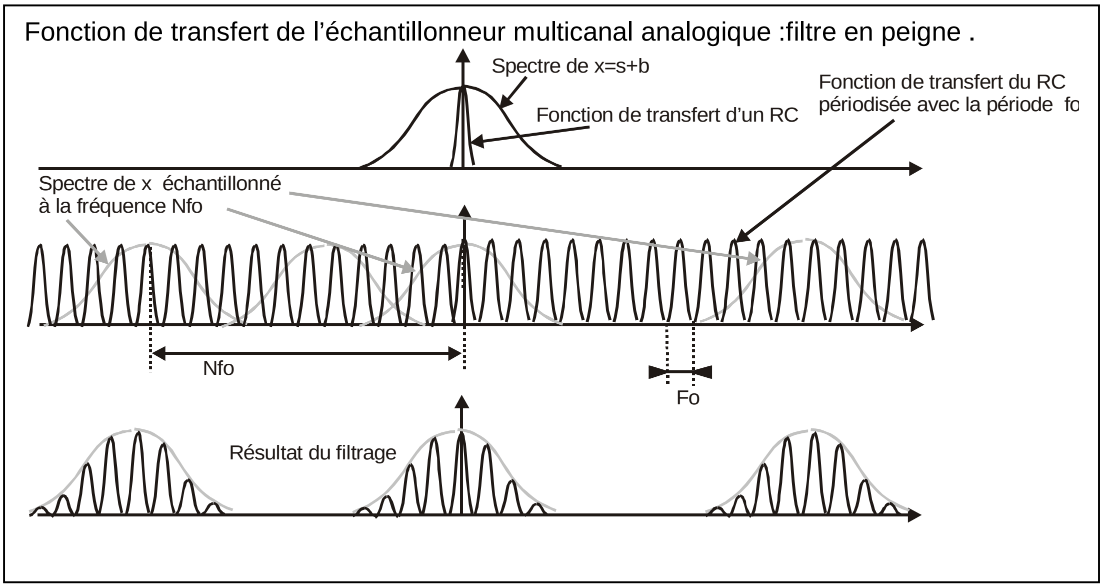
Sa structure est représentée sur la figure suivante. Les N portes analogiques mettant en œuvre un transistor MOS , sont fermées l'une après l'autre au cours de la période . A chaque instant un seul condensateur se charge à partir de la valeur instantannée du signal via la résistance R , et la tension à ses bornes est disponible en sortie. Les autres condensateurs ne sont pas connectés et conservent leur charge .

Les signaux de commande des différentes sections sont obtenues à la sortie d'un décodeur commandé par un compteur multi étages .

La moyenne est obtenue par un filtrage RC , on a déjà eu l'occasion de remarquer qu'un intégrateur RC peut être assimilé à un intégrateur idéal qui serait limité à une durée de l'ordre de la constante de temps .



Le calcul exact du comportement de ce circuit est donné en annexe. Il montre qu'il se comporte comme un filtre dont la fonction de transfert est obtenue par périodisation en fréquence de celle d'une cellule RC avec la période T=1/fo , appliquée au signal d'entrée qui serait échantillonné à la fréquence Nfo. Ceci est illustré ci dessous .

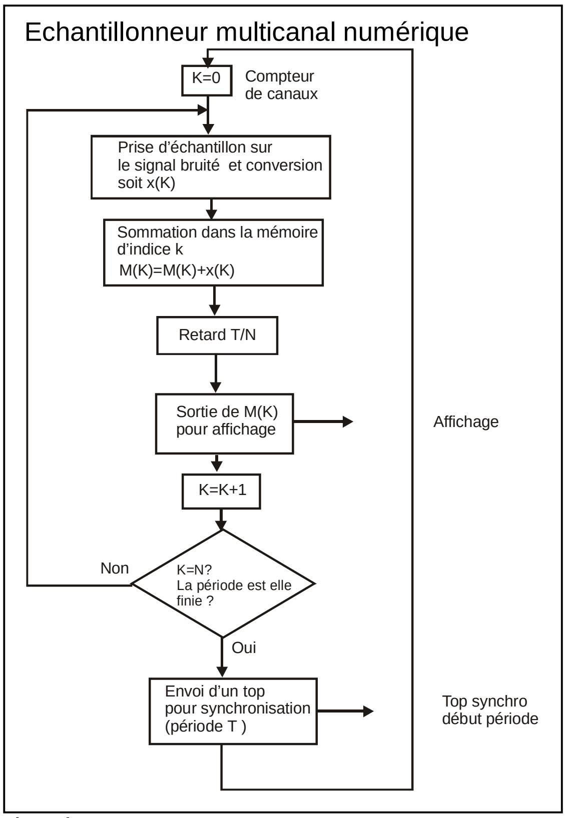


Echantillonneur multicanal numérique

Il suffit de disposer d'un convertisseur analogique numérique rapide que l'on pilote par un microprocesseur ou un ordinateur. Les amplitudes des N canaux sont stockés dans N cases d'une mémoire qui est rafraîchie à chaque période . Le système délivre également les signaux d'excitation du système physique pour assurer la synchronisation de l'ensemble .

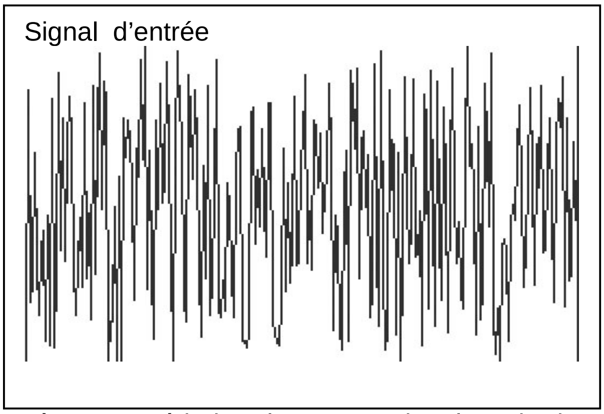
Il n'y a pas ici de division par N , à chaque période la mémoire voit son contenu augmenter à cause de la contribution du signal , par contre la contribution du bruit est globalement nulle .

Le programme à implanter est représenté sur la figure ci contre .

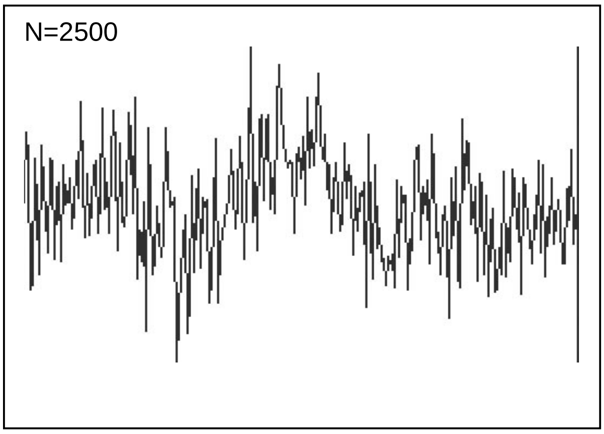


Les figures ci dessous montrent les résultats obtenus pour un signal périodique en forme de raie (sinus cardinal) noyé dans un bruit d'amplitude 50 fois supérieure.

Sans aucun traitement le signal dans le bruit est indécelable



Après 2500 périodes le rapport signal sur bruit est augmenté de $\sqrt{2500}=50$ il est donc égal à 1 , effectivement on commence à percevoir la forme du signal .



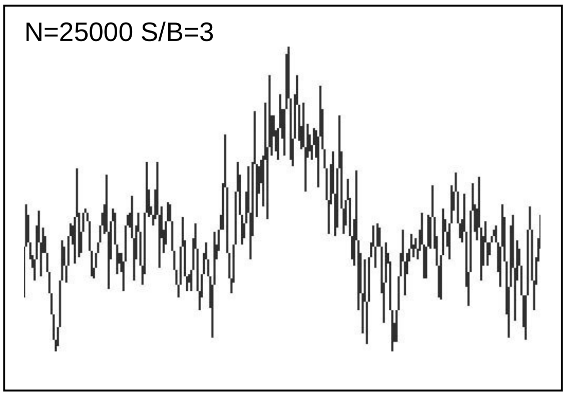
Pour 25000 périodes le gain est

$\sqrt{25000}=158$

le rapport signal bruit devient

$\frac{1}{50}x158=3{,}16$

et la forme se précise .

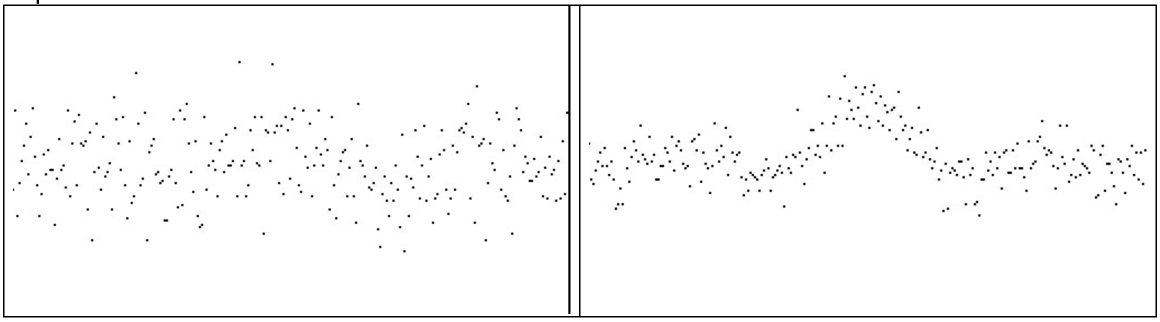


On voit la puissance de la méthode qui n'est limitée que par la stabilité du signal sur une longue période de temps .

Le fonctionnement d'un échantillonneur multicanal numérique est très spectaculaire car on peut observer sur l'écran en temps réel le contenu des mémoires , on voit vraiment le signal sortir du bruit .Les N petits segments représentant les valeurs dans les N canaux ont au départ des positions aléatoires et fluctuantes , on les voit peu à peu s'organiser autour de la forme du signal.

La figure suivante montre par exemple 2 aspects de l'écran au cours du travail précédent .

Aspects successifs de l'écran au cours du travail de l'échantillonneur .



Amélioration du rapport signal bruit par adjonction de bruit .

Il peut paraître étrange que l'on puisse améliorer l'extraction d'un signal déjà bruité en lui ajoutant du bruit et pourtant c'est bien parfois le cas !

Reprenons l échantillonneur multicanal numérique précédent et supposons que le signal injecté à son entrée soit une dent de scie d'amplitude si faible que le convertisseur analogique numérique donne toujours un résultat nul . Quel que soit le nombre de périodes traitées le résultat restera toujours nul. Si par contre on lui ajoute un bruit de moyenne nulle , les amplitudes des échantillons successifs à la sortie du convertisseur cessent d'être nulles et vont s'accumuler dans la mémoire pour constituer finalement un résultat fini fonction du signal initial .

Par exemple un signal d'amplitude 0,2 (pas de quantification 1) sera toujours codé 0 , si on lui ajoute un bruit gaussien de moyenne nulle et de variance 1 les échantillons pourront avoir les valeurs 0 +1 -1 +2 -2 … mais la densité de probabilité est centrée sur 0,2 , le résultat +1 est plus probable que –1 . Pour un nombre suffisant de mesures la moyenne tend vers 0,2 .

Densité de probabilité d'un signal continu 0,2 superposé à un bruit gaussien de variance 1 .